Exercice 1: Parmi les suites de termes généraux suivants, lesquelles sont bornées ?

$$a_n = \frac{3}{2^n}\,; \qquad b_n = ((-1)^n + 1)n\,; \qquad c_n = \frac{n-1}{2n+1}\,.$$

Exercice 2: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ ;
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $+\infty$;
3. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
4. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3: Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-5}\,; \quad b_n = \frac{-4n^2+3n+3}{-2n+3}\,; \quad c_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}\,; \quad d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,;$$

$$e_n = \frac{\sin(n)}{n + (-1)^{n+1}}\,; \quad f_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}\,; \quad g_n = \frac{\mathbf{e}^n}{n^n}\,.$$

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_n) : x\ln(x) = n$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $[1; +\infty[$ notée u_n.
2. Montrer que (u_n) est croissante et que $u_n \leqslant n$ pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$.
3. En déduire que $u_n \geqslant \frac{n}{\ln(n)}$ pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$.
4. Conclure quant au comportement asymptotique de la suite (u_n).

Exercice 5:

1. Montrer qu'une suite divergente de limite $+\infty$ est minorée.
2. Que peut-on dire concernant la limite d'une somme d'une suite bornée et d'une suite qui diverge vers $-\infty$? Démontrez-le.

Exercice 6: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique, c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+q} = u_n$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.
2. Montrer que (u_n) admet une limite si et seulement si (u_n) est constante.

Exercice 7: Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

Exercice 8: Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{\operatorname{Arctan}(\operatorname{ch}(\cos(n)))\mathbf{e}^n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{\cos(n) - 2}{\operatorname{Arctan}(\mathbf{e}^{-n})}$
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $u_n = \dfrac{\lfloor na \rfloor}{n}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
6. $u_n = \dfrac{\lfloor na \rfloor}{a}$ pour $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$.

1. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis montrer qu'elle converge.
2. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une relation entre I_{n+1} et I_n, puis en déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Retrouver cette limite à l'aide du théorème des gendarmes.

Exercice 10: On pose $A = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$, Montrer que A est non vide et bornée, puis déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A.

Exercice 11: On s'intéresse aux ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } B = \left\{ \frac{nm}{(n+m)^2},\ (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}.$$

Déterminer, s'ils existent, le maximum, le minimum et les bornes supérieure et inférieure de A et de B.

Exercice 12: [*] Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{u_0 + u_1 + ... + u_n}{n+1}$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Que pensez-vous de la réciproque?
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
   Que pensez-vous de la réciproque?
3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 13: Étudier les couples de suites de termes généraux suivant :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 14: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour la suite (S_n) ?

Exercice 15: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 16: Montrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 17: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_0 = 1,\ w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 3w_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, w_1, u_2 et w_2.
2. Montrer que la suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18: Déterminer des expressions explicites des suites suivantes :

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 19: On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1,\ 0 < x_n < 1$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 20: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \mathrm{sh}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis déterminer sa limite.

Exercice 21: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est bornée.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et calculer sa limite.